ТЕОРИЈА БРОЈЕВА И ПОЛИНОМА

Задаци за домаћи (I део) - 2018/2019 година

1. Доказати да за сваки природан број n важи:
   (а) $27 \mid 10^n + 18n - 1$
   (б) $9 \mid 4^n + 15n - 1$
   (в) $30 \mid n^5 - n$.

2. Доказати да $108 \mid 9^{n+2} - 12 \cdot 9^n - 3^{n+4} + 63 \cdot 3^n - 27$ важи за сваки природан број n.

3. Нека су x и y цели бројеви такви да је $29x + 18y$ дељив са 17. Доказати да је број $23x + 9y$ дељив са 17. Да ли број $11x + 8y$ мора бити дељив са 17?

4. Одредити све природне бројеве n за које је разломак $\dfrac{27n + 17}{9n + 2}$ цео број.

5. Нека су a и b узајамно прости природни бројеви. Доказати да је највећи заједнички делилац за бројеве $a - b$ и $a^2 + ab + b^2$ или 1 или 3.

6. Нека су l, m и n природни бројеви. Доказати да је $(lm, ln) = l(m, n)$.

7. Доказати да за природне бројеве m и n важи $\varphi(mn)\varphi((m,n)) = (m,n)\varphi(m)\varphi(n)$.

8. Одредити све природне бројеве такве да је $\sigma(n) \cdot \tau(n)$ непаран број.

9. Одредити све природне бројеве n такве да је $\varphi(3n) = 2\varphi(n)$.

10. Ако је p прост број већи од 3, доказати да $24 \mid p^2 - 1$. Да ли $24 \mid p^2 - q^2$, ако је q такође прост број већи од 3?

11. Ако су p и $2p^2 + 1$ прости, доказати да је и $3p^2 + 2$ такође прост.

12. Ако је n природан број који није дељив са 4, доказати да је $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ дељив са 5.

13. Одредити цифре a и b тако да је број $\overline{73840a59b1}$ дељив са 91.

14. Одредити последње две цифре броја:
    (а) 11^{2017} (б) 11^{121} (в) $11^{11^{11^{11}}}$ (г) $((11^{11})^{11})^{11}$.

15. Одредити остатак при дељењу броја $1111^{22} + 2222^{33} + 3333^{44} + 4444^{55} + 5555^{66}$ са 13.

16. Доказати да за сваки природан број n важи
    (а) $5^n \mid 3^{8 \cdot 5^{n-1}} - 1$;
    (б) $5^{n+1} \mid 12^{6 \cdot 5^n} + 1$;
    (ц) $6^{n+1} \mid 11^{6^n} - 1$.

17. Низ природних бројева дефинисан је са $a_1 = 11$, $a_{n+1} = 11^{a_n}$. Одредити последње две цифре бројева a_{2017} и a_{2018}.

18. Доказати да су за произвољан природан број k последњих $2k$ цифара броја $5^{2^{2k+1}+2k} - 25^k$ нуле.

19. Ако су a и b узајамно прости цели бројеви, доказати да $252 \mid (a^6 + b^6 - 1)(a^6 + b^6 - 2)$.

20. Нека је p непаран прост број који не дели број a. Доказати да је тачно један од бројева $A = a^{1+2+\cdots+(p-1)} - 1$ и $B = a^{1+2+\cdots+(p-1)} + 1$ дељив са p.

21. Доказати да је за сваки природан број n и сваки прост број p, број $1 + \sum\limits_{k=1}^{p-1} k^{n(p-1)}$ дељив са p.

22. Нека су a, b и c природни бројеви већи од 1, такви да је $(a,b) = (b,c) = (c,a) = 1$ и $\{x_1, x_2, \ldots x_a\}$, $\{y_1, y_2, \ldots y_b\}$ и $\{z_1, z_2, \ldots z_c\}$, редом, потпуни систем остатака по модулу a, b и c. Доказати да скуп

$$\{x_i bc + y_j ca + z_k ab \mid 1 \le i \le a, \quad 1 \le j \le b, \quad 1 \le k \le c\}$$

чини потпуни систем остатака по модулу abc.

23. Нека је p непаран прост број и k цео број такав да је $0 < k < p$. Доказати да је $(k-1)!(p-k)! \equiv_p (-1)^k$.

24. Нека су p и $p+6$ прости бројеви. Доказати да важи $80 \cdot 3^{p+5} + 3^4 \cdot 6! \cdot (p-1)! + (p+4)! \equiv_{p(p+6)} 0$.

25. Доказати да је за сваки непаран прост број p бројилац m разломка

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1}$$

дељив са p.